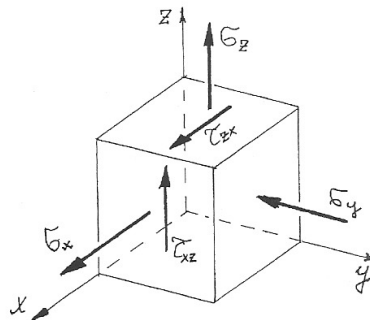


- 1. Feladat:** (25 pont) Egy gépalkatrész egyik belső pontjában lévő feszültségállapotot egy elemi kis kockán ábrázoltuk. Az ábrán látható feszültségek nagysága ismert, irányukat (előjelüket) az ábra alapján állapítsa meg!

Adatok: $\sigma_x = 220 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$ $\sigma_z = 100 \text{ MPa}$
 $\tau_{xz} = 80 \text{ MPa}$ $E = 200 \text{ GPa}$ $m = 3,2$

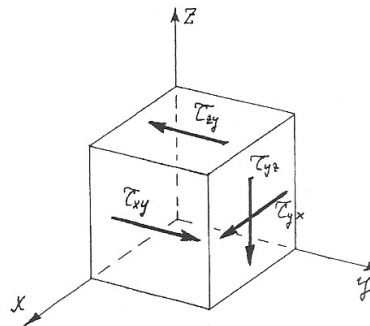
- Írja fel a vázolt feszültségi állapot \mathbf{F} feszültség-tenzorát!
- Rajzolja meg a Mohr-diagramot!
- Rajzon ábrázolja a feszültségi főirányokat és a rajzon adja meg azok szöghelyzetét az x, y, z koordinát tengelyekhez képest!
- Számítsa ki az egyenértékű feszültséget a Mohr- és a HMM-elmélet szerint is!



- 2. Feladat:** (25 pont) Egy nyírásra igénybevett keresztmetszet kritikus pontjában levő feszültségállapotot az ábrán látható kis elemi kockán szemléltetjük. Az ábrán látható feszültségek nagysága ismert, irányukat (előjelüket) az ábra alapján állapítsa meg!

Adatok: $\tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$ $\tau_{zy} = 60 \text{ MPa}$ $m = 3,2$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\mathbf{n}^T = [0,3482 \quad 0,3482 \quad 0,8704]$

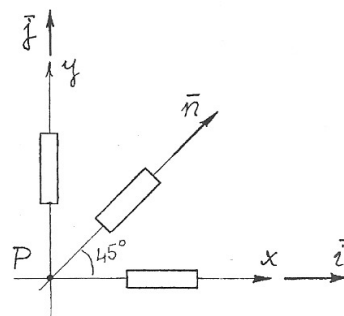
- Írja fel a vázolt feszültségállapot \mathbf{F} feszültség-tenzorát!
- Számítsa ki a főfeszültségeket!
- Határozza meg az \mathbf{A} alakváltozási tenzort az xyz koordináta-rendszerben!
- Számítsa ki az adott \mathbf{n} normálvektorú síkhoz tartozó $\mathbf{p_n}$ feszültségvektort, valamint annak normális irányú komponensét ($\sigma_n = ?$)!
- Számítsa ki az \mathbf{n} irányú ϵ_n fajlagos nyúlást!



- 3. Feladat:** (25 pont) Egy rugalmas test P felületi pontjának kis környezetében az ábra szerint elrendezett nyúlásmérő bélyegekkel mért fajlagos nyúlások:

Adatok: $\epsilon_x = 6 \cdot 10^{-4}$ $\epsilon_y = -3 \cdot 10^{-4}$ $\epsilon_n = 2 \cdot 10^{-4}$
 $G = 80 \text{ GPa}$ $m = 3,5$

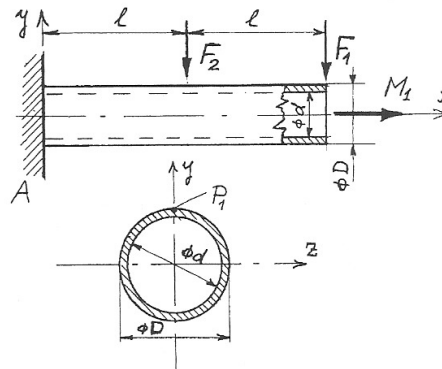
- Határozza meg az \mathbf{A} alakváltozási tenzort!
- Határozza meg az \mathbf{F} feszültségtenzort!
- Számítsa ki a HMM elmélet szerinti egyenértékű feszültséget!



- 4. Feladat:** (25 pont) Az állandó keresztmetszetű csőből készült befogott tartót az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erők hajlításra (és nyírásra), az \mathbf{M}_1 nyomatékú erőpár csavarására veszi igénybe.

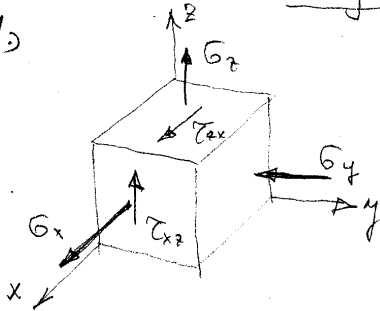
Adatok: $\ell = 40 \text{ cm}$ $D = 60 \text{ mm}$ $d = 52 \text{ mm}$
 $F_1 = 1 \text{ kN}$ $F_2 = 600 \text{ N}$ $M_1 = 1500 \text{ Nm}$

- Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!
- Határozza meg a befogott keresztmetszet P_1 pontjában a feszültségi állapotot jellemző feszültség-összetevőket (a nyírást elhanyagolva)!
- Számítsa ki a főfeszültségeket!
- Állapítsa meg a Mohr szerinti egyenértékű (redukált) feszültséget!



Megoldások

1.)



$$F = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & -\sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 & 0 & 80 \\ 0 & -60 & 0 \\ 80 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

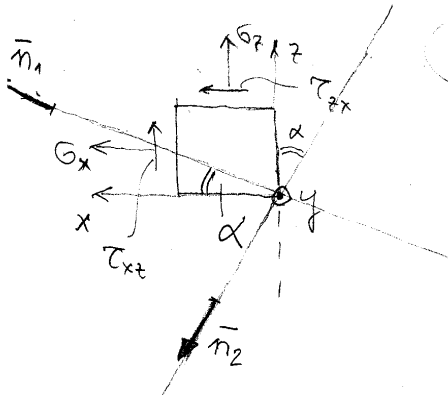
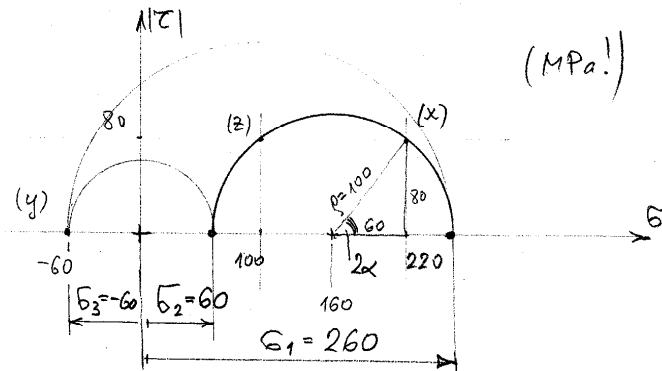
A Mohr-diagramról leolvasható:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 160 \text{ MPa}$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \rho = 260 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \rho = 60 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = \sigma_y = -60 \text{ MPa}$$



$$\bar{n}_3 = \bar{j}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\alpha = 53,13^\circ \Rightarrow \alpha = 26,565^\circ$$

$$\sigma_{\text{egy (Mohr)}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 260 + 60 = 320 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{egy (HMH)}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[200^2 + 120^2 + 320^2]} = 280 \text{ MPa}$$

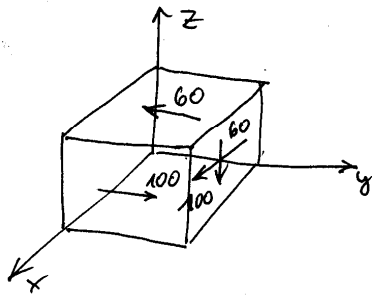
$$F_I = 220 - 60 + 100 = 260 \text{ MPa}$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} -60 & 0 \\ 0 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 220 & 80 \\ 80 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 220 & 0 \\ 0 & -60 \end{vmatrix} = -6000 + 15600 - 13200 = -3600 \text{ (MPa)}^2$$

$$F_{III} = \det(F) = -60 \cdot \begin{vmatrix} 220 & 80 \\ 80 & 100 \end{vmatrix} = -936000 \text{ (MPa)}^3$$

$$(-60 - \sigma) [(220 - \sigma)(100 - \sigma) - 80^2] = 0$$

$$\sigma_3 = -60 \quad \sigma^2 - 320\sigma + 15600 = 0 \rightarrow \sigma_{1,2} = \begin{matrix} 260 \\ 60 \end{matrix}$$



$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & -60 \\ 0 & -60 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (3p)$$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} 0,3482 \\ 0,3482 \\ 0,8704 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda_i & 100 & 0 \\ 100 & 0-\lambda_i & -60 \\ 0 & -60 & 0-\lambda_i \end{bmatrix} = -\lambda_i [\lambda_i^2 - 3600] - 100[-100\lambda_i] =$$

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{13600} = \pm 116,62 \text{ MPa} = -\lambda_i^3 + 13600\lambda_i = 0$$

$$\underline{A} = \frac{1}{2G} \left[\underline{F} - \frac{\underline{F} \cdot \underline{n}}{m+1} \right] \quad (2p) \quad \frac{F}{G} = (1+\nu) \cdot 2 \quad \nu = \frac{1}{m}$$

$$G = \frac{F}{(1+\frac{1}{m}) \cdot 2} = \frac{200}{2,625} = 76,19 \text{ GPa} \quad (3p)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 116,62 \text{ MPa} \\ \lambda_2 = 0 \text{ MPa} \\ \lambda_3 = -116,62 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5p)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \frac{1}{2G} \left[0 + \frac{0}{4,2} \right] = 0 \quad (2p)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = 6,563 \cdot 10^{-4} \quad (2p)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = -3,938 \cdot 10^{-4}$$

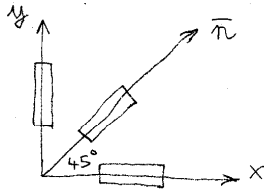
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6,563 & 0 \\ 6,563 & 0 & -3,938 \\ 0 & -3,938 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \quad (1p)$$

$$\underline{s}_n = \underline{F} \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} 100 \cdot 0,3482 \\ 100 \cdot 0,3482 - 60 \cdot 0,8704 \\ -60 \cdot 0,3482 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34,82 \\ -17,404 \\ -20,892 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (2p)$$

$$\sigma_n = \underline{n}^T \cdot \underline{s}_n = \begin{bmatrix} 0,3482 & 0,3482 & 0,8704 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34,82 \\ -17,404 \\ -20,892 \end{bmatrix} = -12,12 \text{ MPa} \quad (2p)$$

$$\epsilon_n = \underline{n}^T \cdot \underline{A} \underline{n} = \underline{n}^T \cdot \begin{bmatrix} 2,285 \\ -1,1424 \\ -1,3712 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = -0,796 \cdot 10^{-4} \quad (3p)$$

③



$$\epsilon_x = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$\epsilon_y = -3 \cdot 10^{-4}$$

$$m = 3,5$$

$$\epsilon_z = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{A} = ?$$

$$\underline{F} = ?$$

$$\sigma_{\text{red, HMM}} = ?$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \bar{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_m = \bar{n}^T \underline{A} \bar{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon_x + \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \epsilon_y$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \epsilon_m - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \left(2 - \frac{6 - 3}{2} \right) \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{F} = 2G \left(\underline{A} + \frac{A_z}{m-2} \underline{E} \right) \rightarrow \sigma_z = 2G \left(\epsilon_z + \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{m-2} \right) = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1-m} = \frac{6-3}{1-3,5} \cdot 10^{-4} = -1,2 \cdot 10^{-4}$$

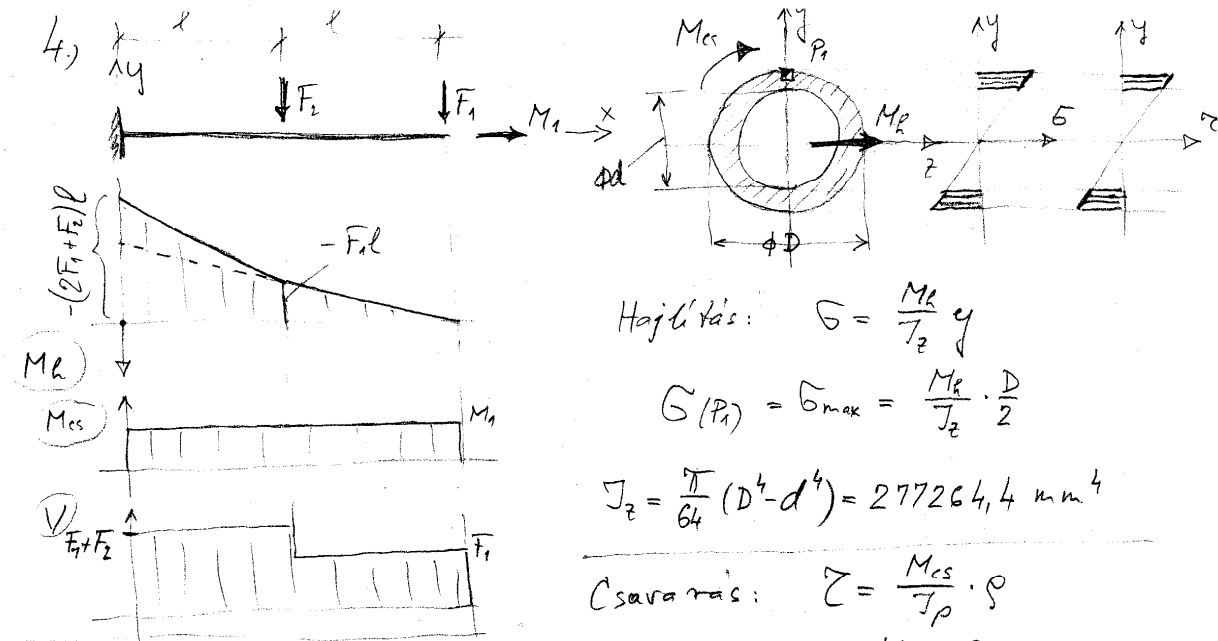
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{F} = 2G \left(\underline{A} + \frac{A_z}{m-2} \underline{E} \right) = 2 \cdot 80 \cdot 10^3 \left(\begin{bmatrix} 6 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix} + \frac{6-3-1,2}{3,5-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot 10^{-4} =$$

$$= \begin{bmatrix} 115,2 & 8 & 0 \\ 8 & -28,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{red, HMM}} = \sqrt{F_I^2 - 3F_{II}} =$$

$$= \sqrt{(115,2 - 28,8)^2 - 3[(115,2 \cdot 28,8) - 8^2]} = 132,7 \text{ MPa}$$



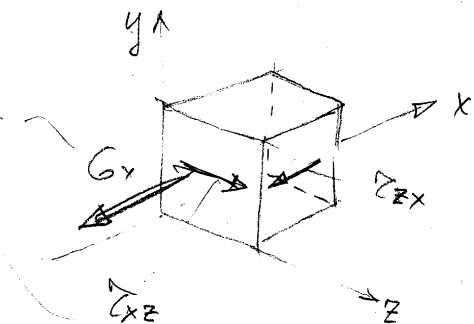
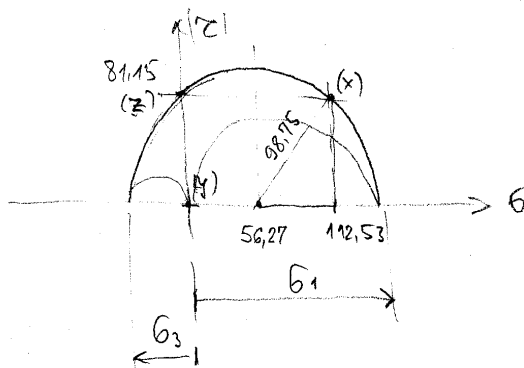
A befogott kereszt-
metszetben:

$$M_k = M_A = (2F_1 + F_2)l = (2 \cdot 1000 + 600) \cdot 0,4 = 1040 \text{ Nm} = 1040 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$M_{cs} = M_1 = 1500 \text{ Nm} = 1500 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\sigma(P_1) = \frac{1040 \cdot 10^3}{277264,4} \cdot 30 = 112,53 \text{ MPa}$$

$$\tau(P_1) = \frac{1500 \cdot 10^3}{554528,8} \cdot 30 = 81,15 \text{ MPa}$$



$$\sigma_1 = 56,27 + 98,75 = 155,02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 56,27 - 98,75 = -42,48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{egy} = \sigma_1 - \sigma_3 = 197,5 \text{ MPa}$$